213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Cadre : Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces de Hilbert

1) Produit scalaire, espace pré-hilbertien

Définition 1. $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ est un produit scalaire si :

(i) Pour tout $y \in H$, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire.

(ii) Pour tous $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(iii) Pour tout $x \in H$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$.

(iv) Pour tout $x \in H$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

L'espace H muni d'un produit scalaire est appelé espace pré-hilbertien. On fixe pour la suite un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur H.

Remarque 2. *Pour $x, y \in H$, $\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle$.*

Exemple 3. *Soit $H = \mathbb{C}^d$. Le produit scalaire canonique est défini pour $x = (x_1, \ldots, x_d), y = (y_1, \ldots, y_d) \in H$ par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i \overline{y_i}$.*

Proposition 4 (Cauchy-Schwarz)**.** *Si H est pré-hilbertien, alors :*

$$\forall\, x, y \in H,\ |\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Corollaire 5. *La relation $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur H*

Exemple 6. *Dans $\mathbb{C}^d$, on retrouve la norme usuelle.*

Proposition 7. *Un espace vectoriel normé H est un espace pré-hilbertien si, et seulement si, $\|.\|$ vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire :*

$$\forall\, x, y \in H,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Définition 8. On dit que deux éléments x et y de H sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. Pour $A \subset H$, on définit son orthogonal par $A^\perp = \{x \in H \,|\, \forall\, a \in A,\ \langle x, a \rangle = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Théorème 9 (Pythagore)**.** *Si $x, y \in H$ sont orthogonaux, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Définition 10. On dit que H est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme induite par son produit scalaire.

Exemple 11. *Tout espace pré-hilbertien de dimension finie est de Hilbert.*

2) Théorème de projection sur un convexe fermé

On fixe H un espace de Hilbert et K un convexe fermé non vide de H.

Théorème 12. *Pour tout $f \in H$, il existe un unique élément de K, noté $P_K(f)$, et appelé projection de f sur K, tel que :*

$$\|P_K(f) - f\| = \inf_{v \in K} \|v - f\|$$

De plus, $P_K(f)$ est caractérisée par :

$$\forall v \in K,\ \mathrm{Re}\left(\langle f - P_K(f), v - P_K(f) \rangle\right) \leqslant 0$$

Remarque 13. *L'application $x \mapsto P_K(x)$ est 1-lipschitzienne.*

Corollaire 14. *Soient M un sous-espace vectoriel fermé de H et $f \in H$. Alors $P_M(f)$ est caractérisé par :*

$$P_M(f) \in M \qquad \text{et} \qquad \forall\, v \in M,\ \mathrm{Re}\left(\langle f - P_M(f), v \rangle\right) = 0$$

De plus, P_M est un opérateur linéaire.

Corollaire 15. *Soit F un sous-espace vectoriel de H.*

(i) Si F est fermé, alors $F \oplus F^\perp = H$.

(ii) F est dense si, et seulement si, $F^\perp = \{0\}$.

3) Dualité

Théorème 16 (Riesz-Fréchet)**.** *Soit $\varphi \in H'$. Alors :*

$$\exists!\, f \in H,\ \forall\, v \in H,\ \langle \varphi, v \rangle = \langle f, v \rangle$$

Application 17. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $T^\star \in \mathcal{L}(H)$ tel que :*

$$\forall\, x, y \in H,\ \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^\star y \rangle \qquad \text{avec} \qquad \|T\| = \|T^\star\|$$

On appelle $T^\star$ l'opérateur adjoint de T.

Proposition 18. *Pour $T, S \in \mathcal{L}(H)$, on a $T^{\star\star} = T$, $(TS)^\star = S^\star T^\star$.*

Exemple 19. *En dimension finie, les notions d'opérateurs adjoints sont traduites par les notions de matrices transposées ou transconjuguées.*

Théorème 20 (Lax-Milgram)**.** *Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur H, et $\ell \in H'$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $a(u, v) = \ell(v)$. Si de plus a est symétrique, u réalise le minimum sur H de $v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$.*

Théorème 21 (Hahn-Banach)**.** *Soit F un sous-espace vectoriel strict de H. Tout $f \in F'$ admet un prolongement continu sur H de même norme.*

II Bases hilbertiennes

1) Définitions et premières propriétés

Définition 22. Une famille d'un espace pré-hilbertien sera dite orthogonale si ses éléments sont deux à deux orthogonaux, et orthonormales si ses éléments sont de plus de norme 1.

Proposition 23. *Toute famille orthonormale est libre*

Définition 24. Une famille orthonormale est appelée base hilbertienne si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense.

Proposition 25 (Gram-Schmidt)**.** *Soit $N \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$ et $(f_n)_{1 \leqslant n < N}$ une famille libre de H. Il existe une famille orthonormale $(e_n)_{1 \leqslant n < N}$ de H telle que, pour tout $n < N$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.*

Exemple 26. *Les suites $\mathbb{1}_n$ sont une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$, mais pas une base algébrique. Les applications $e_n : t \mapsto e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.*

Théorème 27. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

Proposition 28. *Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille orthonormale finie de H, et soit F l'espace vectoriel engendré par cette famille. La projection orthogonale P_F sur F est définie pour $x \in H$ par $P_F(x) = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$. En conséquence $\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\| + \sum_{j \in J} \left|\langle x, e_j \rangle\right|^2$.*

Proposition 29 (Bessel)**.** *Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille orthonormale de H. Alors, pour tout $x \in H$, on a $\sum_{j \in J} \left|\langle x, e_j \rangle\right|^2 \leqslant \|x\|^2$.*

Théorème 30. *Soit $(e_j)_{j \in J}$ orthonormale dans H. Sont équivalents :*

- *(i)* $(e_j)_{j \in J}$ *est une base hilbertienne.*
- *(ii)* $\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{j \in J} \left|\langle x, e_j \rangle\right|^2$ *(Bessel)*
- *(iii)* $\forall x, y \in H,\ \langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \langle y, e_j \rangle$ *(Parseval)*

2) Polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 31. Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et strictement positive, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$. On dit alors que ρ est une fonction poids.

Définition 32. On définit $L^2(I, \rho)$ comme l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ mesurables vérifiant $\int_I |f(x)|^2 \rho(x)\, dx < +\infty$.

Proposition 33. *$L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\rho = \int_X f(x) \overline{g}(x) \rho(x)\, dx$.*

Théorème 34. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < \infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.*

3) Séries de Fourier

Définition 35. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Les coefficients exponentiels de Fourier de f sont :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

En posant $e_n : t \mapsto e^{int}$, la série de Fourier associée à f est la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_{-n}$.

Proposition 36 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si f est continue par morceaux et 2π-périodique, alors $\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0$.*

Théorème 37. *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. On a en particulier :*

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)^2$$

Proposition 38. *Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisation $\tilde{f}$ de f donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.*

Remarque 39. *L'hypothèse $\mathcal{C}^1$ par morceaux est nécessaire.*

Théorème 40. *Si f est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

III Applications

1) Convergence faible

Définition 41. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge faiblement vers $x \in H$, noté $x_n \xrightarrow{H} x$, lorsque :

$$\forall\, y \in H, \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Remarque 42. *Ceci est en réalité une caractérisation d'une définition plus générale. La convergence forte entraîne la convergence faible, mais la réciproque est fausse.*

Proposition 43. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers x dans H. Alors $\liminf_{n\to+\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$. De plus, sont équivalents :*

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers x.*

(ii) $\limsup_{n\to+\infty} \|x_n\| \leqslant \|x\|$.

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Théorème 44. *De toute suite bornée de H on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.*

Proposition 45. *Le rayon spectral d'un opérateur autoadjoint sur H est égal à sa norme.*

Application 46. *Soient H un espace de Hilbert réel, et $J : E \to \mathbb{R}$ convexe continue et coercive. Alors J admet un minimum sur H.*

2) Espaces de Sobolev

On considère $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 47. Soit $f \in L^1(I)$. On dit que f admet une dérivée faible s'il existe $g \in L^1(I)$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, on a $\int_I f\varphi' = -\int_I g\varphi$. On note alors $g = f'$, qui est unique.

Définition 48. On définit $H^1(I) = \left\{f \in L^2(I) \,\middle|\, f' \in L^2(I)\right\}$, que l'on munit du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle_{H^1} = \langle f, g\rangle_{L^2} + \langle f', g'\rangle_{L^2}$.

Théorème 49. $\left(H^1(I), \langle .,.\rangle_{H^1}\right)$ *est un espace de Hilbert.*

Définition 50. On définit $H_0^1(I)$ comme l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans $H^1(I)$. $H_0^1(I)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est munit du produit scalaire $\langle .,.\rangle_{H^1}$.

Application 51. *Grâce à une formulation faible d'un problème différentiel et au théorème de Lax-Milgram, on peut démontrer l'existence d'une solution faible à ce problème.*

Application 52 (Dirichlet)**.** *Pour $f \in L^2$, on considère le problème :*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \textit{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Il existe une unique solution faible $u \in H_0^1([0,1])$ à ce problème.

Développements

- Projection sur un convexe fermé et théorème de Riesz (12,14,16) [Bre87]
- Densité des polynômes orthogonaux (34) [Rou15]

Références

[HL99] F. Hirsch et G. Lacombe. *Éléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod

[Bre87] H. Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson

[Rou15] F. Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini